



COLEGIUL NAȚIONAL GHEORGHE LAZĂR

Bd. Regina Elisabeta, Nr.48, Sector 5, București

Tel: +4.0213.134.756

E-mail: secretariat@cnlazar.ro



Test de verificare a cunoștințelor pentru admitere în clasa a X-a

Disciplina Matematică

Clasa a IX-a

Proba scrisă

August 2025

1. (0,9p) Fie $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât $[x - y] = 3$ și $x^2 \leq 12y$. Calculați $S = 2x + 3y$.
2. (0,9p) Numerele reale strict pozitive a, b și c sunt în progresie aritmetică și $a + b + c = 21$. Numerele $a + 2, b + 3, c + 9$ sunt în progresie geometrică. Calculați $a^2 + b^2 + c^2$.
3. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + a$, $g(x) = x^2 - 4x + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.
 - a) (0,9p) Aflați numărul real a pentru care vârful parabolei asociate graficului funcției f aparține graficului funcției g .
 - b) (0,9p) Aflați numărul real a pentru care ecuația $(g \circ f)(x) = -1$ are o singură soluție reală.
 - c) (0,9p) Aflați numărul real a pentru care $f(x) \geq -g(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$.
4. (0,9p) Fie $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$ și $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Calculați $E(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^n x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^n x}$.
5. (0,9p) Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Calculați modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.
6. (0,9p) Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ și $D(m,5)$. Determinați numerele reale m și n astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.
7. (0,9p) În triunghiul ABC are loc relația $4S = a^2 \sin 2B$. Demonstrați că triunghiul este dreptunghic.
8. (0,9p) Fie M un punct din interiorul dreptunghiului $ABCD$. Arătați că $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Notă: Se acordă **1p** din oficiu. Toate subiectele sunt obligatorii. Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

Examen de transfer - clasa a X-a

1. $[x-y]=3 \Rightarrow 3 \leq x-y < 4 \quad 3+y \leq x < 4+y$ 0,3p
 $\left. \begin{aligned} (y+3)^2 &\leq x^2 < (y+4)^2 \\ x^2 &\leq 12y \end{aligned} \right\} \Rightarrow (y+3)^2 \leq 12y \Rightarrow y^2+6y+9 \leq 12y$
 $\Rightarrow y=3$ 0,3p $\Rightarrow 6 \leq x < 7 \Rightarrow 36 \leq x^2 \left\{ \begin{aligned} x^2 &= 36, x \geq 6 \\ x &= 6 \end{aligned} \right.$
 $x^2 \leq 12 \cdot 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 36$
 $\Rightarrow S = 2x + 3y = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 21$ 0,3p

2. $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} ; a+b+c=21 \Rightarrow 3b=21$
 $\Rightarrow b=7$ 0,3p
 $a+2, b+3, c+9 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+2)(c+9)=10^2 \Rightarrow$
 $a+c=14 \Rightarrow a=14-c$
 $(16-c)(c+9)=100 \Rightarrow -c^2+7c+144=100$ 0,3p
 $c^2-7c-44=0 \quad \Delta=49+176=225 \quad c_{1,2} = \frac{7 \pm 15}{2} \begin{cases} c_1=11 \\ c_2=-4 \end{cases}$
 $c > 0 \Rightarrow c=11 \quad a=14-11=3$

$a^2+b^2+c^2 = 3^2 + 7^2 + 11^2 = 9 + 49 + 121 = 179$ 0,3p

3. a) $f(x) = x^2 + 2x + a \quad x_v = -1 ; y_v = a-1 \Rightarrow \forall (-1, a-1)$ 0,5p
 $\forall f \in G_g \Leftrightarrow g(-1) = a-1 \Leftrightarrow 1+4+2 = a-1 \Rightarrow a=8$ 0,4p

b) $(g \circ f)(x) = f^2(x) - 4f(x) + 2 \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = -1$

$\Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x) + 3 = 0 \Rightarrow f(x) = 3 \text{ sau } f(x) = 1$
 $\text{I } f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + a = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + a - 3 = 0$
 are 1 sol $\Leftrightarrow \Delta = 0 ; \Delta = 4 - 4a + 12 \Leftrightarrow 16 - 4a = 0 \Rightarrow a = 4$
 $\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$ nu are sol. reale 0,4p
 $\text{II } f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + a = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + a - 1 = 0$

are 1 sol $\Leftrightarrow \Delta = 0$; $\Delta = 4 - 4a + 4 \Leftrightarrow 8 - 4a = 0 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ are 2 sol. reale 0,4
In concluzie, $a = 4$. 0,1p

c) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + a \geq -x^2 + 4x - 2 \Leftrightarrow$
 $2x^2 - 2x + a + 2 \geq 0 \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ 0,5p
 $\Delta = 4 - 8(a+2) = -8a - 12 \Rightarrow -8a - 12 \leq 0$
 $-12 \leq 8a \Rightarrow a \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 0,4p

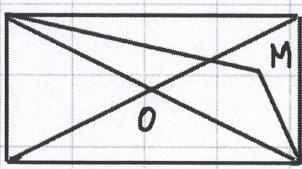
4. $E(x) = \frac{1}{1 + \frac{\sin^n x}{\cos^n x}} + \frac{1}{1 + \frac{\cos^n x}{\sin^n x}} = \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} + \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} = 1$ 0,9p
 pentru x admisibil.

5. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{j} + 4\vec{j} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ 0,4p
 $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 0,5p

6. ABCD paralelogram $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$
 $\vec{AB} = 2\vec{i} + (n-3)\vec{j}$; $\vec{DC} = (2-m)\vec{i} - 3\vec{j}$ 0,5p
 $2-m = 2 \Rightarrow m = 0$; $n-3 = -3 \Rightarrow n = 0$ 0,4p

7. $4S = a^2 \sin 2B \Leftrightarrow 4 \frac{ac \sin B}{2} = a^2 \cdot 2 \sin B \cos B$ 0,3

$c = a \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{c}{a}$ 0,3p
 $\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = 2c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$ 0,3p

8. A  B In $\triangle MAC$, MO este mediană, deci
 $MO^2 = \frac{2(MA^2 + MC^2) - AC^2}{4}$
 D C In $\triangle MAD$, MO este mediană, deci
 $MO^2 = \frac{2(MB^2 + MD^2) - BD^2}{4}$ 0,5p

$\Rightarrow 2(MA^2 + MC^2) - AC^2 = 2(MB^2 + MD^2) - BD^2$
 și cum $AC = BD \Rightarrow MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ 0,4p



COLEGIUL NAȚIONAL GHEORGHE LAZĂR

Bd. Regina Elisabeta, Nr.48, Sector 5, București

Tel: +4.0213.134.756

E-mail: secretariat@cnlazar.ro



MEC

Test de verificarea cunoștințelor pentru admitere în clasa a XI-a

Disciplina Matematică

Clasa a X-a

Proba scrisă

August 2025

1. (1p) Calculați partea întreagă a numărului $x = \log_5 5 + \log_5 7 + \log_7 3$.
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \log_7(6^x + 1)$.
 - a) (1p) Demonstrați că funcția f este inversabilă și determinați inversa sa.
 - b) (1p) Determinați numărul de puncte în care graficul funcției f intersectează prima bisectoare.
3. (1p) Determinați cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)^{60}$.
4. (1p) Rezolvați ecuația $(1 - 3i)z^3 = 2 + 4i$.
5. (1p) Se consideră punctele $B(1, 4)$, $C(3, -1)$. Determinați, în cazul în care există, $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ astfel încât dreapta de ecuație $d: (2m + 1)x + (m - 2)y + m + 3 = 0$ să fie perpendiculară pe dreapta BC .
6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ 4x - 3, & x < 3 \end{cases}$.
 - a) (1p) Arătați că f este inversabilă și calculați f^{-1} ;
 - b) (0,5p) Calculați $(f \circ f^{-1})(1) + (f \circ f^{-1})(2) + \dots + (f \circ f^{-1})(2025)$.
7. (1p) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
8. (0,5p) Scrieți sub formă trigonometrică numărul complex $z = 1 - \cos x + i \sin x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Notă: Se acordă 1p din oficiu. Toate subiectele sunt obligatorii. Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

Examen de transfer - clasa a XI-a

Nota: Se acordă 1p din oficiu. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1 $x \geq 3^{\sqrt{\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 3}} \Rightarrow x \geq 3$ 0,4p
Asem $\log_3 5 < \frac{3}{2}$, $\log_5 7 < \frac{3}{2}$ și $\log_7 3 < 1 \Rightarrow x < 4$ 0,4p Deci $[x] = 3$ 0,2p

2 a) Demonstrarea bijectivității 0,8p
 $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_6(7^x - 1)$ 0,2p

b) Ecuația primei bisectoare este $y = x$. 0,2p

Numărul de puncte în care G_f intersectează prima bisectoare este egal cu numărul de soluții ale ecuației $f(x) = x$. 0,1p

$$\log_7(6^x + 1) = x \Leftrightarrow 6^x + 1 = 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$$

Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă. 0,4p

Ecuația $g(x) = 1$ are atunci cel mult o soluție.

Deoarece $g(1) = 1 \Rightarrow x = 1$ este unica soluție.

Deci G_f și prima bisectoare au un singur punct comun. 0,3p

3. $T_{k+1} = C_{60}^k \left(\frac{1}{5}\right)^{60-k} \left(\frac{2}{5}\right)^k = C_{60}^k \frac{2^k}{5^{60}}$ 0,2p Asem $T_{k+1} \geq T_k$ și $T_{k+1} \geq T_{k+2}$

$$T_{k+1} \geq T_k \Leftrightarrow \frac{60!}{k!(60-k)!} \cdot \frac{2^k}{5^{60}} \geq \frac{60!}{(k-1)!(61-k)!} \cdot \frac{2^{k-1}}{5^{60}} \Leftrightarrow \frac{2}{k} \geq \frac{1}{61-k} \Leftrightarrow 122 \geq 3k$$
 0,3p

$$T_{k+1} \geq T_{k+2} \Leftrightarrow \frac{60!}{k!(60-k)!} \cdot \frac{2^k}{5^{60}} \geq \frac{60!}{(k+1)!(59-k)!} \cdot \frac{2^{k+1}}{5^{60}} \Leftrightarrow \frac{1}{60-k} \geq \frac{2}{k+1} \Leftrightarrow 3k \geq 119$$
 0,3

Deci $122 \geq 3k \geq 119$, $k \in \overline{0, 60} \Rightarrow k = 40 \Rightarrow T_{\max} = T_{41} = C_{60}^{40} \frac{2^{40}}{5^{60}}$ 0,2p

4. $(1-3i)z^3 = 2+4i \Rightarrow z^3 = \frac{2+4i}{1-3i} \Rightarrow z^3 = \frac{-10+10i}{10} = -1+i$ 0,3p

$$a = -1, b = 1 \Rightarrow r = \sqrt{2} \quad \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

$$z^3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \Rightarrow z_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{(8k+3)\pi}{12} + i \sin \frac{(8k+3)\pi}{12} \right), k = 0, 1, 2$$
 0,2

5. $m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4+1}{1-3} = -\frac{5}{2}$ 0,2p $d \perp BC \Leftrightarrow m_d \cdot m_{BC} = -1$ 0,2p

$$-\frac{2m+1}{m-2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow -10m-5 = 2m-4 \Leftrightarrow -1 = 12m \Rightarrow m = -\frac{1}{12} \quad 0,6p$$

6. a) injectivitatea 0,4p surjectivitatea 0,3p

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 9 \\ \frac{x+3}{4}, & x < 9 \end{cases} \quad 0,2p$$

b) $(f \circ f^{-1})(x) = x \quad (\forall) \quad x \in \mathbb{R} \quad 0,2p$

$$\Rightarrow (f \circ f^{-1})(1) + \dots + (f \circ f^{-1})(2025) = 1 + 2 + \dots + 2025 = \frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2051325 \quad 0,3p$$

7. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{2})}{2} \cdot \sin \frac{2x + \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x + \pi}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0 \quad 0,4$$

I $\sin\left(\frac{x + \pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x + \pi}{2} = k\pi \Rightarrow x \in \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = M_1$

II $\sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi \Rightarrow x \in \left\{\frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = M_2$

Deci $x \in M_1 \cup M_2 \quad 0,6p$

8. $z = 1 - \cos x + i \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,2p$
 $= 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \right) \quad 0,4p$

Pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow |z| = 2 \sin \frac{x}{2}$

si $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad 0,2p$